# MÖGLICHKEITEN ZUR REDUZIERUNG DES LEHRSTOFFS

HEINRICH BÜRGER (UNIV. WIEN)

## EIN BEISPIEL FÜR LEHRPLÄNE UND DEREN INTERPRETATION

Klagen, daß der in Lehrplänen vorgeschriebene Lehrstoff zu umfangreich sei, sind alt. Solche Klagen sind *teilweise* unberechtigt, denn Lehrpläne sind im allgemeinen so formuliert, daß Lehrbuchautoren und Lehrern ein relativ großer Interpretationsspielraum eingeräumt wird, der viele Einschränkungen bei der Behandlung einzelner Stoffgebiete zuläßt. Davon wird jedoch viel zu wenig Gebrauch gemacht, im Gegenteil der Interpretationsspielraum wird von Lehrbuchautoren (und in Folge damit auch von Lehrern) oft in exzessiver Weise ausgenützt und überschritten.

Dies soll im folgenden am Beispiel des Themas "Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen" belegt werden. Dieses Thema ist in den Lehrplänen von 1909 als Lehrstoff für die 6. Klasse der Gymnasien wie folgt angeführt: *Einfachste logarithmische und Exponentialgleichungen* . In den folgenden Lehrplänen für die gymnasiale Oberstufe von 1928, 1945, 1967 bzw. 1970 und 1978 ist dieses Thema explizit nicht angeführt. Eine Lehrplanformulierung von 1978, durch die eine Behandlung solcher Gleichungen in der 6. Klasse gerechtfertigt werden kann, ist die folgende: "*Exponentialfunktionen und logarithmische Funktionen*". Im Rahmen der Behandlung dieser Funktionen können etwa Gleichungen der Form $c \cdot a^{kx} = b$ in sinnvollen Zusammenhängen auftreten. Eine eingehende Behandlung von Gleichungen der folgenden Art wird aber durch die obige Lehrplanformulierung von 1978 weder gefordert noch gerechtfertigt.

** $3^x \cdot 5^{2x-3} = 7^{x+1}$

** $2^{x-1} - 3^{x-3} = 2^{x-3} + 3^{x-4}$

** ${}^x\log 2 + {}^{2x}\log 3 = 5$

Diese Aufgaben sind einem Lehrbuch entnommen, das aufgrund der Lehrpläne von 1978 approbiert wurde.

Im Jahre 1989 traten neue Lehrpläne für die gymnasiale Oberstufe in Kraft, die ausführlicher als frühere Lehrpläne formuliert wurden, um einerseits wesentliche Lernziele hervorzuheben und andrerseits mögliche Lehrstoffeinschränkungen deutlich zu machen. Für die 6. Klasse sind folgende Lernziele angeführt, die zum Bezug haben:

*"Logarithmen: Definieren von Logarithmen; Formulieren und Herleiten von Rechengesetzen; Lösen von Exponentialgleichungen der Form $a^x=b$ (etwa beim Untersuchen von Wachstumsprozessen)."*

Diese Lernziele könnten etwa durch Aufgaben der folgenden Art abgedeckt werden:

* Berechne: ${}^2\log 8$, ${}^2\log \sqrt{8}$, ${}^2\log \frac{1}{\sqrt{8}}$
* $K=Ko\cdot r^t$. Drücke t durch die übrigen Variablen aus.
* Beweise: ${}^a\log x\cdot y = {}^a\log x + {}^a\log y$
* In welcher Zeit hat sich eine Bakterienkultur verdoppelt, wenn sie in jeder Stunde um 15% wächst? (Lösung von $1,15^t=2$)

In Lehrbüchern, die aufgrund der Lehrpläne von 1989 approbiert wurden, scheinen allerdings Aufgaben auf, dieim Hinblick auf die obigen Lernziele entbehrlich sind und zum Teil sogar als Überschreitungen des Lehrplans angesehen werden können.

** Löse: $\sqrt{0,5^{2x-1}\cdot\sqrt[4]{2^{3x}}} = \sqrt[6]{0,125}$

** Löse:
$2^{3x+6}+3^{3x}-3^{3x+3}+5\cdot 2^{3x+4}-2^{3x+1}= 2\cdot 3^{3x+2}-2^{3x+5}+3\cdot 2^{3x+2}-4\cdot 3^{3x+1}$

** Löse: $\ln(3x-5)+\ln(15-8x) = \ln(6x-11)+\ln(7-4x)$
(Diese Gleichung hat keine Lösung: es gibt keine Zahl x, sodaß alle auftretenden Logarithmen definiert sind.)

** Stelle mit möglichst einfachen Logarithmanden dar:
$$\log \frac{a\cdot\sqrt[3]{(x-y)^4 b^{10}}}{b\cdot\sqrt[5]{(x-y)a^2}}\cdot(ab)^3$$

(Aus welchen Schulbüchern diese Aufgaben stammen, wird hier und im folgenden mit Absicht nicht angegeben.)

## INTENTIONEN DER GELTENDEN GYMNASIALLEHRPLÄNE

Im Schulorganisationsgesetz von 1962 ist festgelegt:
"*Die allgemeinbildenden höheren Schulen haben die Aufgabe, den Schülern eine umfassende und vertiefte Allgemeinbildung zu vermitteln und sie zugleich zur Hochschulreife zu führen.*"

Nach dieser zweifachen Aufgabe haben sich auch die Ziele des Mathematikunterrichts zu richten, die in ihren Grundzügen im Lehrplan in der Bildungs- und Lehraufgabe festgelegt sind.
Darin sind als wesentliche Forderungen u.a. enthalten:

- *Die Schüler sollen grundlegende Kenntnisse, Fertigkeiten, Fähigkeiten und Einsichten in Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik erwerben und verwenden können. Sie sollen mit mathematischen Methoden und Denkweisen vertraut werden. Sie sollen mit der Verwendung mathematischer Texte und Arbeitsmittel, insbesondere elektronischer Rechengeräte, vertraut werden.*
- *Die Schüler sollen ihr Wissen und Können in verschiedenen Bereichen anwenden können und Mathematik als nützliches Werkzeug zur Lösung von Alltagsproblemen erkennen. Sie sollen Einsichten in Probleme des Anwendens - wie Probleme des Bildens von Modellen - gewinnen.*
- *Die Schüler sollen Fähigkeiten im Argumentieren und exakten Arbeiten, im Darstellen und Interpretieren, im produktiven geistigen Arbeiten sowie im kritischen Denken erwerben.*
- *Der Mathematikunterricht soll zur Persönlichkeits- und Sozialentwicklung beitragen. So sollen die Schüler befähigt werden, sorgfältig, konzentriert und planmäßig zu arbeiten, Informationsquellen sachgerecht zu nutzen, selbständig Wissen zu erwerben, sowohl selbständig als auch kooperativ zu arbeiten, Freude an kreativem Verhalten und intellektuellen Leistungen zu gewinnen.*

Aus der Fülle und Vielfalt dieser Zielsetzungen folgt, daß für das Erlernen und Durchführen mathematischer Verfahren nur ein Teil der Unterrichts- und Übungszeit aufgewendet werden kann. Vielmehr sollen - wie in den Didaktischen Grundsätzen des Lehrplans ausgeführt - den Schülern auch "*Übungsaufgaben zur Schulung von mathematischen Grundtätigkeiten (Argumentieren und exaktes Arbeiten, Darstellen und Interpretieren, produktives geistiges Arbeiten, kritisches Denken) gestellt werden*". Solche Aufgaben sollen auch bei mündlichen und schriftlichen Leistungsfeststellungen und bei der schriftlichen Reifeprüfung auftreten.

Damit ergibt sich für alle Lehrer die Notwendigkeit, sorgfältig zu überlegen, in welchem Ausmaß und auf welchem Niveau einzelne Inhalte behandelt und welche Aufgaben gestellt werden. Speziell trifft dies für Aufgabentypen zu, die Techniken erfordern, die im weiteren Mathematikunterricht und insbesondere auch bei Maturaaufgaben selten oder überhaupt nicht verwendet werden. (Beispiele dafür sind die kritisierten Exponentialgleichungen und logarithmischen Gleichungen.) Viele dieser Aufgabentypen treten auch bei mathematischen Studien an Universitäten nicht auf. Schließlich ist zu beachten, daß nur 20 bis 25 Prozent aller AHS-Maturanten Studienrichtungen wählen, in denen mathematische Lehrveranstaltungen vorgesehen sind. Für den Großteil der Schüler an AHS sind somit komplexere Rechenverfahren bedeutungslos, hingegen ist für diese Schüler die Entwicklung allgemeiner Denk- und Kommunikationsfähigkeiten durch den Mathematikunterricht wichtig.

VORSCHLÄGE: LEHRPLANGERECHTE AUFGABEN - MÖGLICHE REDUKTIONEN

Im folgenden werden zu verschiedenen Themen **Lernziele** des Mathematikunterrichts zitiert, die in den geltenden Lehrplänen angeführt sind. Dabei wurden Lernziele ausgewählt, die einerseits neue Schwerpunkte des Mathematikunterrichts hervorheben, andrerseits auch Möglichkeiten für Einschränkungen aufzeigen. Diese Möglichkeiten sind durch (im Lehrplan nicht enthaltene) Unterstreichungen gekennzeichnet.

Anschließend an diese Lehrplanzitate werden meist einige **Aufgaben** angeführt, die als **Konkretisierungen einzelner Lernziele** gedacht sind. Vielfach sind diese Aufgaben keine Rechenaufgaben mit einem eindeutigen Ergebnis und sie gehören nicht immer zum "traditionellen Aufgabenrepertoire". Doch sollten aufgrund der Lehrpläne auch Aufgaben dieser Art von Schülern geübt werden und bei mündlichen und schriftlichen Leistungsfeststellungen aufscheinen. (Diese Aufgaben sind mit * gekennzeichnet.)

Schließlich werden **Aufgabentypen** beispielhaft angeführt, **die** aufgrund des Lehrplans im Unterricht **nicht behandelt werden müssen,** in manchen Fällen auch durch den Lehrplan nicht gerechtfertigt werden können. (Diese Aufgaben sind mit ** gekennzeichnet.)

**Flächenmaße, 1.Klasse**

Lehrplan: "*Kennen von Flächenmaßen; Herstellen und Begründen von Beziehungen zwischen verschiedenen Flächenmaßen, <u>soweit sie von praktischer Bedeutung sind</u>. ... Zu vorgegebenen Flächeninhalten Beispiele angeben.*"

- * Was ist 1 ha? Welche Fläche hat den Inhalt 1 ha?
- * 1 ha = ? $m^2$. 1$m^2$ = ? ha. Begründe!
- * Zeichne in einem geeigneten Maßstab eine Fläche mit dem Inhalt 20 ha. Gib die Seitenlängen an.

** Schreib mehrnamig: 607,438 $m^2$

** Drücke in $m^2$ aus: 269 $cm^2$

**Rechnen mit Brüchen, 2.Klasse**

Lehrplan: "*... Schüler sollen ... jene Fertigkeiten erwerben, die für entsprechende algebraische Umformungen Voraussetzung sind.*"

"*Die vier Grundrechenoperationen mit einfachen Zahlen im Kopf durchführen. Die vier Grundrechenoperationen schriftlich durchführen, im allgemeinen beschränkt auf Zahlen, die ein Rechnen mit kleinen Nennern ermöglichen.*

*Beherrschen der Regeln, die dem Bruchrechnen zugrunde liegen; Beschreiben dieser Regeln mit Variablen; Umformen von einfachen Ausdrücken (Termen), die Variablen enthalten, nach diesen Regeln (z.B.* $\frac{u}{2}:n$, $\frac{a}{2}+b$). *Interpretieren dieser Regeln etwa durch Zahlen, durch geometrisches Veranschaulichen, durch Deuten in Sachsituationen.*"

* Veranschauliche in einer Zeichnung: $\frac{1}{2}:3$

* Was ergibt $\frac{1}{2}:4$, $\frac{1}{2}:5$, $\frac{1}{2}:a$ ?

* Warum ist $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{20}$ ?
  (Begründung durch die Deutung: $\frac{3}{4}\cdot a = \frac{3}{4}$ von a)

* Warum ist $5:\frac{1}{2} = 10$ ? (Begründung durch die Deutung des Dividierens als "Enthaltensein".)

** Berechne: $2\frac{19}{35} - \left(4\frac{7}{15} - 3\frac{16}{21}\right)$, $2\frac{26}{35} : 2\frac{22}{25}$

**Ganze und rationale Zahlen, 3.Klasse**

Lehrplan: "*... sollen die Schüler ... Fertigkeiten und Einsichten erwerben, die für die Algebra von Bedeutung sind. Daher kann das Rechnen auf einfache, leicht handhabbare Zahlen und Rechenausdrücke beschränkt werden.*"

** Berechne: $\left(+\frac{2}{3}\right)+\left[\left(-2\frac{5}{7}\right)+\left(-5\frac{11}{21}\right)\right]+\left(+3\frac{1}{2}\right)$

**Arbeiten mit Termen, 3.Klasse**

Lehrplan: "*Umformen von Termen unter Verwendung grundlegender Rechenregeln, einschließlich der Regeln für das Bruchrechnen [Elementarumformungen wie z.B.: $2\cdot x+3\cdot x = (2+3)\cdot x$;*

*$5x-(2x-4) = 5x-2x+4$; $(3\cdot a)^2 = 3\cdot 3\cdot a\cdot a = 9\cdot a^2$; $\frac{\frac{x}{2}}{3} = \frac{x}{2}:3 = \frac{x}{6}$ ].*"

"*Verknüpfen von Elementarumformungen, eingeschränkt auf Ausdrücke geringer Komplexität [z.B.: $4\cdot(3x-1)-6\cdot(x+4) = \ldots$;*

*$\frac{2a^3+4a^2}{a} = \ldots$; $5-\frac{x-2}{2} = \ldots$ ].*"

"*Arbeiten mit den Formeln $(a\pm b)^2= \ldots$ und $a^2-b^2= \ldots$*"

"*Analysieren und Darstellen von Termstrukturen um die Anwendbarkeit von Rechenregeln zu erkennen [z.B. hat $(6a-3b)\cdot(2a+4b)$ u.a. die Strukturen $A\cdot B$, $A\cdot(B+C)$, $(A-B)\cdot C$, $(A-B)\cdot(C+D)$ ...]. Begründen von Umformungen durch Rechenregeln.*"

* Bringe $5-\frac{x-2}{2}$ auf eine möglichst einfache Form und begründe die einzelnen Umformungsschritte durch Rechenregeln.

[Lösung: $5 - \frac{x-2}{2} =$ Regeln: $A - \frac{B}{C} = \frac{A\cdot C}{C} - \frac{B}{C}$

$= \frac{10}{2} - \frac{x-2}{2} =$ $\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$

$= \frac{10-(x-2)}{2} =$ $A-(B-C) = A-B+C = A+C-B$

$= \frac{12-x}{2}$ ]

** $8c-(7f+4g)-[4c-(3g-4f)+f]+[6g-(2c+g-3f)] = \ldots$

** $4a^2-[3a^2-b-(2a^2+ab-3b^2] = \ldots$

** $\frac{3rs+6r^3}{9r-3rs} = \ldots$

Bemerkung: Die im Lehrplan angeführten Beispiele zum Umformen von Termen sind von recht unterschiedlicher Art und zeigen, daß sich die Schüler mit sehr verschiedenen Termstrukturen auseinandersetzen und mit einer Fülle von Regeln arbeiten müssen. Ein sehr behutsames Vorgehen im Unterricht ist somit unerläßlich. Dies ist ein Grund für die Lehrplan geforderte Einschränkung auf Ausdrücke geringer Komplexität. Darüber hinaus treten komplexe

Termstrukturen (wie sie beispielsweise die oben angeführten durch ** gekennzeichneten Beispiele aufweisen) in den Aufgaben, die in der Oberstufe in der Analytischen Geometrie, in der Analysis und in der Stochastik gestellt werden, nicht auf. Die Fehler, die von Schülern der Oberstufe bei algebraischen Umformungen gemacht werden, treten zumeist bei Ausdrücken geringer Komplexität auf, wie etwa bei den oben zitierten Ausdrücken $\frac{\frac{x}{2}}{3}$ oder $5-\frac{x-2}{2}$. Die Annahme, daß durch Üben von Umformungen komplexerer Ausdrücke die Sicherheit und Geläufigkeit im Umformen einfacher Ausdrücke gefördert wird, konnte bisher empirisch nicht nachgewiesen werden. Die Erfahrungen zeigen vielmehr, daß viele Oberstufenschüler (und sogar auch Mathematik-Mathematikstudenten!) bei einfachen Umformungen Fehler begehen, obwohl sie in der Unterstufe umfangreiche Übungen mit komplexeren algebraischen Ausdrücken durchgeführt haben. Um solche Rechenschwächen zu beseitigen, muß in erster Linie das Umformen von algebraischen Ausdrücken geübt haben, die jene Strukturen auf weisen, die im Oberstufenunterricht tatsächlich auftreten und bei denen häufig Schülerfehler auftreten. Solche Übungen sollten intensiv, in größeren zeitlichen Abständen und in vielfältigen Zusammenhängen durchgeführt werden. Wenig zielführend scheint hingegen das Umformen von komplexen Ausdrücken mit Strukturen, die im späteren Unterricht nicht auftreten (Beispiele dazu auch im folgenden Abschnitt).

**Arbeiten mit Termen, Lösen von Gleichungen, 4.Klasse**

Lehrplan: *"Umformen von Termen, auch von Bruchtermen, unter Anwenden unterschiedlicher Rechenregeln, im allgemeinen eingeschränkt auf wenige Umformungsschritte."*
*"Lösen von Gleichungen, die durch einfache Umformungen auf lineare Gleichungen zurückgeführt werden können."*

Die folgenden 6 Beispiele sind dem Kommentar zum Lehrplan entnommen und erläutern, in welchem Bereich sich die Anforderungen beim Umformen von Termen bewegen könnten.

• Stelle als Summe von 2 Summanden dar: $(z^2-z+1)(1+\frac{1}{z})$

• Stelle als Produkt der Form $A\cdot Q^2$ dar:

$(A+A\cdot\frac{p}{100})+(A+A\cdot\frac{p}{100})\cdot\frac{p}{100}$

• Kürze: $\frac{y^2-4}{2y+4}$

• Stelle durch einen Bruch mit möglichst einfachen Zähler dar:
$\frac{a}{a-b}-\frac{a+b}{a}$

• Kürze: $(x^2+10x+25):\frac{x+5}{2}$

• Stelle als einfachen Bruch dar: $\frac{1}{\frac{1}{g}+\frac{1}{b}}$

•• $\left(-\frac{4r^2s}{3a^3b^2}\right) : \left(\frac{6r^2s^2}{a^3b^3}\right) =$

•• $\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right) =$

•• $(10u^2+19uv+6v^2):(2u+3v) =$

•• $\frac{a+5}{(a-5)^2} = \frac{2}{a+5}-\frac{a}{a^2-25}$

**Ungleichungen, 5.Klasse**

Lehrplan: "*Beschreiben von Zahlenmengen, insbesondere von Intervallen und Umgebungen in Verbindung mit geometrischen Darstellungen; dabei Arbeiten mit dem Betrag von reellen Zahlen. Aus Schranken für gegebene Größen Schranken für daraus berechenbare Größen ermitteln, Abschätzen der Genauigkeit von Rechenergebnissen. Beschreiben des Monotonieverhaltens von Funktionen mit Ungleichungen, Beweisen des Monotonieverhaltens in einfachen Fällen.*"
Für das Realgymnasium verpflichtend, für das Gymnasium nicht verpflichtend: "*Lösen von Ungleichungen mit Fallunterscheidungen (etwa quadratische Ungleichungen, Bruchungleichungen, Betragsungleichungen.*"

* Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x-3|<4$, für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x-3|>4$? Stelle die entsprechenden Mengen auf einer Zahlengeraden dar.

* Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x-p|<r$? Veranschauliche auf einer Zahlengeraden.

* $8{,}4 \le x \le 8{,}5$ und $2{,}9 \le y \le 3{,}0$ bzw. $a \le x \le b$ und $c \le y \le d$ $(a,b,c,d>0)$

  Ermittle daraus Schranken für $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$, $x:y$, $x^2-y^2$.

* Welches Monotonieverhalten hat die Funktion f mit $f(x)=\frac{2}{x}$ in $\mathbb{R}^-$? Beweise die Antwort.

Realgymnasium:

* Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt: a) $x^2+4x-12>0$ b) $\frac{x-3}{x+3}>0$

** Löse (1) in $\mathbb{N}$, (2) in $\mathbb{R}$: $16(2-x)^2+(3x-2)^2 < (15-5x)^2$

** Löse in $\mathbb{Q}$: $\frac{3x-2}{7} - \frac{1-2x}{3} - x > \frac{13x+5}{14} - \frac{5x}{6}$

**Potenzen mit ganzzahligen Exponenten, Wurzeln, 6. Klasse**

Lehrplan: "*Erkennen, Formulieren und Beweisen von Rechengesetzen. Umformen von Ausdrücken in dem für spätere Anwendungen erforderlichen Ausmaß. Analysieren der Rechenstruktur von Termen, Begründen einzelner Umformungsschritte durch Rechengesetze.*"

* Beweise $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ unter Verwendung der entsprechenden Definitionen für Potenzen: a) für $m,n \in \mathbb{N}$, b) für $m,n \in \mathbb{Z}$ $(a \neq 0)$

* $(a^{2z}+a^{2z-1}+a^{2z-2}) \cdot (a-1)$

* Stelle den folgenden Ausdruck unter Verwendung nur einer Potenz von x dar. Begründe die Umformungsschritte durch Rechenregeln von Potenzen.

* Welche der folgenden Gleichungen sind für alle $a,b \in \mathbb{R}^+$ richtig? Begründe.

  $\sqrt{a^2-\frac{a^2}{b^2}} = a - \frac{a}{b}$ ; $\sqrt{a^2-\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2-1}$ ; $\sqrt{a^2-\frac{a^2}{b^2}} = a \cdot (1-\frac{1}{b})$

** $\left[ \dfrac{3b^{-3}}{2a(x-y)^{-1}} \right]^{-3} : \left[ \dfrac{(2a^{-1}b^2)^2}{(x-y)^4} : \dfrac{9a^{-5}b^{-3}}{(x+y)^{-1}} \right] =$

** $\dfrac{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[10]{3}}{\sqrt[10]{12} \cdot \sqrt[7]{13}} =$ , $\sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{25}{49} x^2 y^4 z^8}} =$

** Stelle mit rationalen Nenner dar: $\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$

** Löse die Gleichung $\sqrt{x+12} - \sqrt{x-3} = \sqrt{x+32} - \sqrt{x+5}$.

**Differentialrechnung, 7. Klasse**

Lehrplan: "*Die Schüler sollen den Begriff des Differentialquotienten mit dem Begriff des Differenzenquotienten verbinden und mit beiden Begriffen verschiedenartige Vorstelllungen verknüpfen. Sie sollen einige Differentiationsregeln kennen, es genügt jedoch diese in einfachen Beispielen anzuwenden. Beim Untersuchen von Funktionen sollen die Schüler ihre Vorgangsweise begründen bzw. erläutern können. Das Untersuchen von Kurven und das Lösen von Extremwertaufgaben soll die Nützlichkeit der Differentialrechnung aufzeigen.*"
Im Gymnasium lautet der letzte Satz: "*Das Untersuchen von Kurven und das Lösen von Extremwertaufgaben soll die Nützlichkeit der Differentialrechnung aufzeigen; dabei kann eine Einschränkung auf Polynomfunktionen erfolgen.*"

* Ermittle die Ableitung der Funktion $f\colon x \mapsto \frac{1}{x}$ aufgrund der Definition des Differentialquotienten.

* Berechne die größten und kleinsten Werte der Funktion $f\colon x \mapsto x^3-6x^2+9x-8$ im Intervall $[0;5]$. An welchen Stellen werden diese Werte angenommen? Begründe die Aussagen durch Monotonieüberlegungen. Begründe ferner, daß $f$ im Intervall $[0;5]$ genau eine Nullstelle hat.

** Differenziere: $f(x) = \sqrt{\sin 2x + \tan \frac{x}{2}}$

** Einer Kugel mit dem Radius r werden Drehkegel umgeschrieben. Berechne Radius und Höhe jenes Drehkegels, der das kleinste Volumen hat.

** Der Graph einer Polynomfunktion 4.Grades geht durch O=(0;0). Die Stelle 0 ist eine Extremstelle der Funktion. Der Punkt W=(1;-11) ist ein Wendepunkt des Graphen und die Steigung der Wendetangente beträgt dort -16. Gib eine Termdarstellung der Funktion an.

**Integralrechnung, insbesondere Stammfunktionen, 8.Klasse**

Lehrplan: *"Der Umgang mit dem Integral soll nicht auf das Arbeiten mit Flächeninhalten beschränkt werden. Die Schüler sollen sich mit weiteren Deutungen und Anwendungen auseinandersetzen. Dabei sollen sie vor allem Einsichten gewinnen und nicht so sehr neue Verfahren lernen."*
*"Stammfunktionen: Definieren des Begriffes der Stammfunktion, Ermitteln von Stammfunktionen zu einfachen Funktionen. Lösen von Anwendungsaufgaben (etwa Bestimmen des Weges aus Geschwindigkeit und Beschleunigung)."*

Aus dem Lehrplan kann gefolgert werden, daß Integrationsmethoden, wie partielle Integration, Integration nach der Substitutionsregel oder gar Integration mittels Partialbruchzerlegung, nicht als Pflichtstoff anzusehen sind. Dies schließt allerdings nicht aus, daß beispielsweise zu $t \mapsto r \cdot \sin \omega t$ oder $t \mapsto c.e^{kt}$ Stammfunktionen durch "Probieren" ermittelt werden.

**Literatur:**

Bürger, H. u.a.: Mathematik AHS, Kommentarheft 1. Reihe "Lehrplanservice". Österr. Bundesverlag. Wien 1985.

Bürger, H. u.a.: Mathematik AHS, Kommentarheft 2. Reihe "Lehrplanservice". Österr. Bundesverlag. Wien 1988.

Bürger, H. u.a.: Mathematik Oberstufe AHS, Kommentar. Reihe "Lehrplanservice". Österr. Bundesverlag. Wien 1991.